

Hong Kong Mathematics Olympiad (2023/24)

Heats – Group Event

香港數學競賽 (2023/24)

初賽團體項目

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特別指明外，所有答案須以數字的真確值表達，並化至最簡。

不接受近似值。

所有附圖不一定依比例繪成。

Part A

甲部

1. In Figure 1, $VABC$ is a tetrahedron such that $VA \perp VB$, $VB \perp VC$ and $VA \perp VC$. $VA = 5$, $VB = 4$ and $VC = 3$. If D and E are the mid-points of AB and AC respectively, find the volume of pyramid $VBCED$.

圖一中， $VABC$ 是一個四面體，使得 $VA \perp VB$ 、 $VB \perp VC$ 及 $VA \perp VC$ 。 $VA=5$ ， $VB=4$ 及 $VC=3$ 。
若 D 和 E 分別為 AB 和 AC 的中點，求角錐 $VBCED$ 的體積。

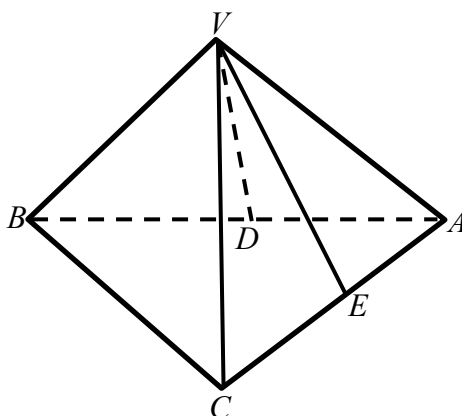


Figure 1

圖一

2. In Figure 2, O is the centre of the circle $DEFGHI$. $\triangle ABC$ intersects the circle at D, E, F, G, H and I such that $AD = EB$ and $BF = CG$. If $\angle ABO = 38^\circ$ and $\angle ACO = 28^\circ$, find $\angle BOC$.

圖二中， O 是圓 $DEFGHI$ 的圓心。 $\triangle ABC$ 與該圓相交於 D, E, F, G, H 及 I 使得 $AD = EB$ 及 $BF = CG$ 。已知 $\angle ABO = 38^\circ$ 及 $\angle ACO = 28^\circ$ 。求 $\angle BOC$ 。

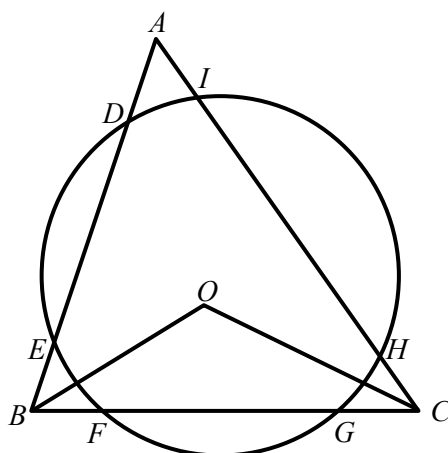


Figure 2

圖二

3. Let a, b and c be positive integers. If $ab + c = 2023$ and $a + bc = 2024$, find the value of $a + b + c$.

設 a, b 及 c 為正整數。若 $ab + c = 2023$ 及 $a + bc = 2024$ ，求 $a + b + c$ 的值。

4. In Figure 3, A_1, B_1 and C_1 are points on BC, AC and AB respectively such that $AC_1 = 2C_1B$, $BA_1 = 2A_1C$ and $CB_1 = 2B_1A$. If the area of $\triangle ABC$ is 21 square units, find the area of the shaded region.

圖三中， A_1, B_1 及 C_1 分別為 BC, AC 及 AB 上的點，使得 $AC_1 = 2C_1B$ ， $BA_1 = 2A_1C$ 及 $CB_1 = 2B_1A$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積是 21 平方單位，求陰影部分的面積。

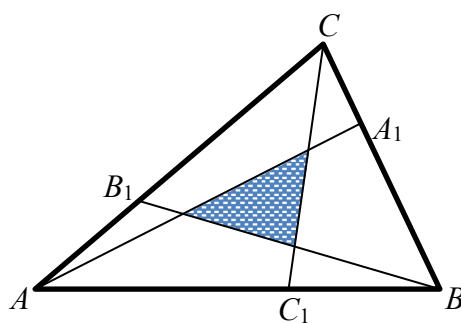


Figure 3

圖三

5. Find the sum of the roots of the equation $(\log_4 x^2)^2 + 9 \log_x 64 = \pi^{3 \log_\pi 3}$.

求方程 $(\log_4 x^2)^2 + 9 \log_x 64 = \pi^{3 \log_\pi 3}$ 的所有根之和。

Part B

乙部

6. In Figure 4, three squares $ABCD$, $MNPQ$ and $MQRS$ of sides 1 cm touch each other so that points A and B are the mid-points of MN and MS respectively. Given that a circle contains all three squares and passes through points C , D , P and R , find the radius of the circle.

圖四中，三個邊長為 1 cm 的正方形 $ABCD$ 、 $MNPQ$ 、 $MQRS$ 併在一起使得點 A 及 B 分別為 MN 及 MS 的中點。已知一圓包含這三個正方形，且通過點 C 、 D 、 P 及 R ，求該圓的半徑。

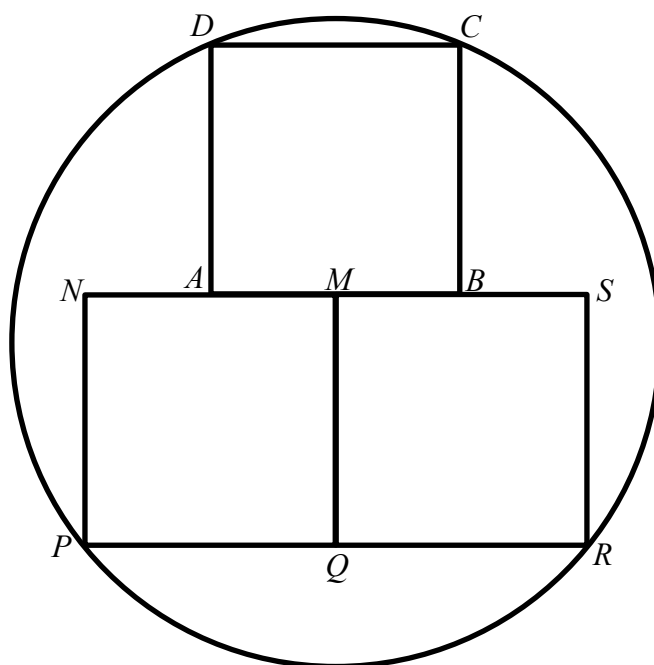


Figure 4

圖四

7. If x, y and z are positive integers, find the number of sets of (x, y, z) satisfying $xyz = 10000$.
若 x, y 及 z 為正整數，求能滿足 $xyz = 10000$ 的 (x, y, z) 組的數目。
8. Let a be a real number. If the equation $x^2 + ax + 6a = 0$ has two integral roots, find the difference between the largest and the smallest values of a .
設 a 為實數。若方程 $x^2 + ax + 6a = 0$ 有兩個整數解，求 a 的最大和最小值之差。

9. If the lengths of the three sides of a triangle are the 25, 39 and 56, find the distance between the in-centre and the orthocentre of the triangle.

若三角形的邊長為 25、39 及 56，求該三角形的內心及垂心之間的距離。

10. In Figure 5, $ABCDE$ is a regular pentagon, BD and CE intersect at P . If the area of $\triangle ABE$ is 1, find the area of $\triangle BPC$.

圖五中， $ABCDE$ 為一正五邊形， BD 及 CE 相交於 P 。若 $\triangle ABE$ 的面積為 1，求 $\triangle BPC$ 的面積。

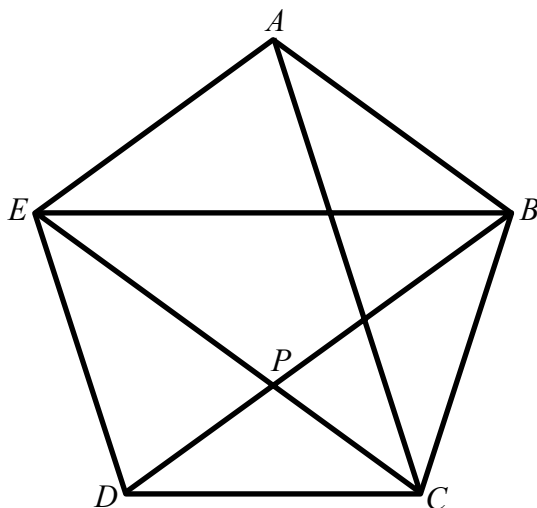


Figure 5

圖五

完
END